Василь КУШНІР, Ренат РІЖНЯК

ІННОВАЦІЙНІ МЕТОДИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ: КОНТЕКСТ ЗАСТОСУВАННЯ МОДЕЛЮВАННЯ

В статті розглядаються особливості реалізації інноваційного підходу до навчання математики, розкривається аспект використання елементів моделювання у процесі формування умінь розв'язувати математичні задачі.

The article considers the features of the realization of the innovative approach to learning Math and reveals the aspect of using elements of modeling in the process of formation skills of solving the Mathematical problems.

Традиційність навчання пов'язана з нормами освіти. Саме досягнення норм освіти є основним завданням традиційного навчання, котре покликане сформувати в учнів певну базу знань, умінь і навичок, без якої формування особистості проблематичне. Тому традиційне навчання є важливим аспектом підготовки учнів до майбутньої навчальної діяльності. Однак традиційність навчання як система володіє певною замкнутістю, консервативністю. Саме тому в науці виникла інша стратегія навчання – інноваційне навчання.

"Інновація – нововведення, зміна, оновлення; новий підхід, створення якісно нового, використання відомого в інших цілях" [1]. Отже "інновація" пов'язана з нововведеннями, змінами й модифікаціями, створенням нового, а інноваційна діяльність – з критичним аналізом, творчістю, виходом за межі загальноприйнятих стандартів, введенням нових видів і форм діяльності та спілкування, з готовністю до сприймання й відображення в педагогічному процесі нових тенденцій. Та чи інша інновація в навчанні математичних предметів повинна володіти інноваційним потенціалом – здатністю забезпечити протягом тривалого часу корисний результат від нововведення.

Інноваційне навчання загалом орієнтоване на розвиток особистості учня, на формування його готовності до реального життя, до його швидких змін, до творчого мислення, критичного аналізу навколишнього світу й себе в ньому. Нормативна система в освіті скоріше змінюється за принципом "не нашкодь", тоді як інноваційне навчання більш сміливо впроваджує в навчання нове, невідоме, неприйняте ще загалом. Інноваційне навчання може виходити за рамки навчальних програм, що відображають зміст традиційної освіти.

Система навчання, що побудована на інноваційних засадах, є синергетичною системою, тобто передбачає порушення стійкості навчального процесу з метою виникнення його нових, більш відкритих для нововведень, структур. Так, розвиток інформаційно-комп'ютерних технологій привів до їхнього проникнення (як активаторів) у педагогічний процес, що викликало його збурення, порушення традиційних структур і створенні нових структур навчання, а саме з використанням інформаційно-комп'ютерних технологій, що кардинально змінило педагогічний процес.

Інноваційне навчання учнів передбачає такі методи й форми навчання, як ділова гра, дискусія, диспут, лекція-роздум, створення проектів, доповіді власних наукових результатів тощо. Окремим компонентом використання інноваційних методів навчання є застосування моделювання у процесі формування предметних компетентностей. Якщо ж концентрувати увагу на формуванні умінь розв'язувати математичні задачі, то очевидним є те, що використання моделювання буде виступати однією з умов формування процедурної компетентності [2].

У даній статті автори мають намір детально розглянути ***використання інноваційних методів формування в учнів старшої школи умінь розв'язувати математичні задачі з використанням моделей та модельних переходів***.

Моделювання являє собою один з основних методів пізнання, є формою відображення дійсності і полягає в з'ясуванні чи відтворенні тих чи інших властивостей реальних об'єктів за допомогою інших процесів, явищ, або за допомогою абстрактного опису у вигляді зображення, плану, сукупності рівнянь, алгоритмів і програм. Моделювання засноване на тому, що модель у визначеному змісті відображає (відтворює, моделює, описує, імітує) деякі важливі для дослідника риси об'єкта.

В даний час моделювання дуже широко використовується не тільки в наукових дослідженнях, але і при розв'язуванні задач із техніки, економіки, геології, медицини і т. ін. Тому поняття "моделювання" і "модель" розглядається в широкому змісті.

Отже, моделлю деякого об'єкта А (оригінала) називають об'єкт В, аналогічний оригіналу А, вибраний чи спеціально побудований людиною для вирішення однієї із таких цілей:

1) замінити оригінал А в уявній чи реальній дії. Така заміна виконується тоді, коли для дії в даних умовах об'єкт В більш зручний (модель замінює об'єкт);
2) створити уявлення про оригінал А за допомогою об'єкта В (модель-уявлення);
3) розтлумачити об'єкт А у вигляді об'єкта В (модель-інтерпретація);
4) дослідити об'єкт А за допомогою об'єкта В (дослідницька модель).

Зазвичай модель може бути використана одночасно і для других цілей. Наприклад, для розв'язування текстових задач будуємо модель тієї ситуації, яка відображена в задачі, – рівняння. Тоді рівняння є дослідницькою моделлю (воно дає можливість встановити ряд властивостей, які характеризують дану ситуацію), і моделлю-уявленням (дає узагальнене уявлення про розглядувану задачу), і моделлю-інтерпретацією (фіксує і пояснює суттєві особливості наявної у задачі ситуації).

У даній роботі зупинимося на використанні моделювання при формуванні таких умінь: уміння розв'язувати текстові математичні задачі, уміння розв'язувати рівняння та нерівності з параметром та уміння розв'язувати задачі інтегративного змісту.

Основна ***мета нашого дослідження*** полягає у тому, щоб визначити методичні умови, за яких використання моделей та модельних переходів для формування умінь розв'язувати математичні задачі буде набувати інноваційного потенціалу у контексті формування в учнів математичної процедурної компетентності.

1. Формування умінь розв'язувати текстові математичні задачі.

Розглянемо формування умінь розв'язувати задачі на процеси, що характеризуються трьома величинами [4]: перша величина − M (наприклад, шлях, робота), друга величина − m (швидкість, продуктивність), третя величина − n (час), а предметом – створення евристичних алгоритмів розв'язання вказаного типу текстових задач. У кожному процесі між основними елементами предметної області задачі завжди буде виконуватися співвідношення $M = m \cdot n$. Однак тип задач на процеси не обмежується лише задачами на рух та роботу. В цьому дослідженні як об'єкт ми використаємо задачу на відсотки, у якій основний компонент задачної ситуації характеризується співвідношенням $a = b \cdot \frac{n}{100}$, де a – частина цілого, b – ціле, n – відсоток частини в цілому.

Умову текстової задачі можна розбити на вихідні дані задачі й сформоване запитання, на яке потрібно знайти відповідь. Вихідну задачну ситуацію можна тлумачити як систему, яка складається з вихідних даних та запитання, на котре потрібно знайти відповідь. При цьому поле можливостей (поле можливих дій) для суб'єкта розв’язування задачі (окремого учня чи разом з учителем класу в цілому) буде слабко структурованим і тому визначення напрямку дій викликає у суб’єкта розв’язування задачі значні труднощі. Процес розв’язування задачі будемо тлумачити як подолання задачної ситуації.

Розв’язуванням задачної ситуації будемо вважати процес перетворення її моделей аж до отримання розв’язку текстової задачі. Тоді все про задачну ситуацію стає відомим і задачна ситуація у контексті її розуміння як проблемної ситуації зникає. Перетворення моделей задачної ситуації полягає в доповненні вихідної системної моделі задачної ситуації новими елементами, які будуть зменшувати невизначеність задачної ситуації й збільшувати її визначеність аж до повної відповіді на запитання в задачі. Такий процес означатиме поповнення інформації про задачну ситуацію до моменту, коли інформації про задачну ситуацію буде достатньо для отримання кінцевої відповіді на запитання, що стояло в умові задачі.

Поле можливих дій суб’єкта розв’язання задачної ситуації в процесі перетворення її моделі ставатиме більш структурованим і в кінцевому підсумку перетвориться в однозначний алгоритм (у розумінні Ф.Неймана чи В.Глушкова) розв’язування задачної ситуації, за яким і будуть отриманні потрібні відповіді.

Доповнюючи (перетворюючи) попередню модель задачної ситуації ми отримуємо нову модель на кожному кроці такого перетворення. По суті мова йде про системне моделювання процесу розв’язування задачі у вигляді створення послідовності системних моделей задачної ситуації, що й приведе до отримання розв’язку задачі. Послідовність і правила побудови відповідних моделей задачної ситуації ми визначимо у вигляді «приписів алгоритмічного типу» (Л.Ланда), або в у вигляді «евристичного алгоритму» (Д.Пойя). Евристики будуть створювати для суб’єкта розв’язування задачі більш структуроване поле можливостей у вигляді визначальних моментів перетворення моделі задачної ситуації, а саме в моменти створення наступних моделей. Водночас самі такі моменти можна вважати за часткові задачні ситуації.

Отже, евристичний алгоритм процесу розв’язання задачної ситуації буде складатися з основних евристик (приписів), що визначатимуть моменти створення чергової моделі задачної ситуації, та «часткових» евристик, котрі визначатимуть процес створення відповідної чергової моделі задачної ситуації.

Проілюструємо висловлені ідеї на прикладі задачі, взятої з [5].

Задача 1. *Маємо два сплави (розчини і таке подібне) з концентрацією речовини P відповідно x та y відсотків. У якому співвідношенні слід взяти ці сплави (розчини і таке подібне), щоб отримати сплав з концентрацією речовини P рівною z?*

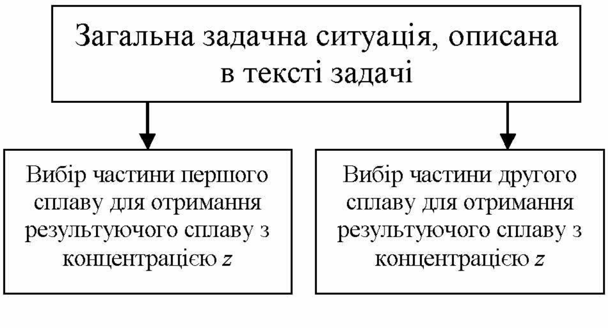

Рис. 1. Ієрархічна модель задачної ситуації задачі 1

Дана задача відноситься до більш складних задач на відсотки та частини. Зобразимо ієрархію задачної ситуації у вигляді графа, а потім від неї перейдемо до структурної моделі у вигляді матриці інформації.

Не втрачаючи загальності, покладемо, що $y<z<x$. Ми пропонуватимемо такий метод розв’язування задачі, який відображатиме структуру задачної ситуації. Нехай результуючий сплав (розчин і таке подібне) отримано у кількості $a+b$. Врахуємо, що ми візьмемо для цього першого сплаву у кількості a, а другого сплаву − у кількості b. Надалі потрібно заповнити клітини матриці інформації, виходячи з умови

задачі та позначень невідомих величин. Пояснимо основні особливості створення структурної моделі задачної ситуації (рис. 2), яка містить опис обох ситуацій, зображених ієрархічною моделлю (рис. 1). По горизонталі задачна ситуація характеризується трьома параметрами − вагою речовини Р у сплаві, вагою сплаву та частиною речовини Р у сплаві. Вертикальні стовпчики описують кількісні характеристики першого та другого сплавів та кількісні характеристики сплаву, що отримався. Так як за умовою задачі x − відсотковий вміст речовини Р у першому сплаві, y − відсотковий вміст речовини Р у другому сплаві, z − відсотковий вміст речовини Р у сплаві, що отримався, то частина речовини Р у першому сплаві − $\frac{x}{100}$, у другому сплаві − $\frac{y}{100}$, у сплаві, що отримався − $\frac{z}{100}$, а вага речовини Р у першому сплаві – $a\cdot\frac{x}{100}$, у другому сплаві – $b\cdot\frac{y}{100}$, а в результуючому сплаві – $(a+b)\cdot\frac{z}{100}$.

Ідея створення матриці інформації задачної ситуації полягає в тому, що:

1) після введення невідомих величин *x, y, z* заповнюємо клітини матриці інформації;

2) у матриці інформації зображуємо зв'язки між її елементами (клітинами) у вигляді рівностей у стовпчика та рядках.

3) Серед цих рівностей знаходимо рівняння чи систему рівнянь і, цим самим, побудуємо модель задачної ситуації у вигляді рівнянь, із яких і знайдемо відповідь.

Модель задачної ситуації у вигляді рівняння є розв'язуючою (з якої отримуємо розв'язок) і позначається на структурній моделі (рис. 2) зафарбованими клітинками. В результаті отримаємо рівняння (1).

Вага речовини Р в сплаві	$a\cdot\frac{x}{100}$	+	$b\cdot\frac{y}{100}$	=	$(a+b)\cdot\frac{z}{100}$
	‖		‖		‖
Вага сплаву	*a*	+	*b*	=	*a*+*b*
	*		*		*
Частина речовини Р в сплаві	$\frac{x}{100}$		$\frac{y}{100}$		$\frac{z}{100}$
	1-й сплав (розчин і т.п.)		*2-й сплав (розчин і т.п.)*		*Сплав (розчин і т.п.), що отримався*

Рис. 2. Структурна модель задачної ситуації задачі 1.

$$a\cdot\frac{x}{100}+b\cdot\frac{y}{100}=(a+b)\cdot\frac{z}{100} \quad (1)$$

Здійснивши елементарні перетворення: помножимо рівність на 100, зведемо подібні доданки при *a* та *b*, розділимо отриману рівність на добуток $b\cdot(x-z)$, отримаємо співвідношення (або пропорцію) (2).

$$\frac{a}{b}=\frac{z-y}{x-z} \quad (2)$$

Аналогічний результат розв'язування задачі отриманий в [5], однак наш метод тісно пов'язаний із наочними (у вигляді ієрархії та матриці інформації) моделями задачної ситуації, що відображає структуру самої задачі та процес її розв'язування, чого немає в [5]. При цьому суб'єкт розв'язування задачі здійснює аналіз і синтез у вигляді системного підходу до створення системних моделей задачної ситуації у вигляді системи, що дозволяє наочно відображати як цілісність (у вигляді матриці), так і структуру задачної ситуації (у вигляді клітин матриці та зв'язків між ними).

2. Формування умінь розв'язувати рівняння та нерівності з параметром.

У самому загальному вигляді можливість структуризації поля можливостей створення алгоритму розв'язування конкретної задачі зводиться до розв'язання таких проблем: формулювання вихідної задачі на певній мові (наприклад, у вигляді тексту) (етап 1); створення математичної моделі вихідної задачі (етап 2); вибір методів та засобів дослідження математичної моделі (етап 3); застосування вибраних методів і засобів до дослідження та перетворення моделі (етап 4); трансляція отриманих при дослідженні та перетворенні моделі результатів на мову вихідної задачі (етап 5).

Наприклад, вихідною задачею може бути текстова задача , а її математичною моделлю − рівняння певного типу; дослідження та перетворення моделі може здійснюватися за допомогою еквівалентних перетворень; процес розв'язування моделі полягає в послідовному її перетворенні за допомогою еквівалентних перетворень; нарешті транслюємо отримані розв'язки на вихідну задачу (наприклад, вибираємо тільки ті корені рівняння, які можуть задовольнити умову задачі).

Поширимо описаний підхід до розв'язування математичних задач типу рівнянь і нерівностей з параметрами. Наведені вище правила є основними «творчими етапами» розв'язування рівнянь і нерівностей з параметрами.

У багатьох збірниках та посібниках з математики, що призначені для школярів, абітурієнтів, студентів педагогічних спеціальностей університетів (відомі збірники задач за авторства та редакцією М.І.Сканаві, В.В.Ясінського, В.Н.Литвиненка, А.Г.Мордковича), є чимала частина задач творчого характеру, які не розв'язуються за допомогою відомих алгоритмів. Висвітлимо аспект застосування уже сформованих в учнів умінь дослідження властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь та нерівностей. Очевидно, що дослідження властивостей заданої функції може здійснюватися різними засобами в залежності від змісту та вибраного способу розв'язання вихідної математичної задачі. Тобто, використовуватиметься один із засобів або їх комбінація [6]:

- повне дослідження заданої функції.
- визначення властивостей функції за побудованим графіком (графік побудований, наприклад, методом перетворень, або з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, або схематично).
- визначення властивостей функції з використанням таких пакетів математичних програм, як ''Advanced Grafer'', ''GRAN'' та інші.
- дослідження окремих властивостей заданої функції – монотонності, екстремумів, тощо.

Розглянемо детальніше висловлену ідею на прикладі.

Задача 2. *Розв'язати нерівність:*

$$x^2-(3m+1)x-3m-2>0 \qquad (3)$$

Нерівність (3) є вихідною математичною задачею. Таким чином, вимога вихідної задачі полягає в тому, щоб встановити залежність між розв'язками нерівності (3) та параметром m. Задачу можна розв'язувати різними способами, виходячи з наведених вище думок. Розглянемо деякі з них детально.

Спосіб 1. Створимо *математичну модель задачі*. Ліва частина нашої нерівності – це квадратний тричлен, у якому x - змінна, а m - параметр. Тому, ліву частину можна представити як формулу, яка задає квадратичну функцію. Це і буде *математичною моделлю задачі*, розв'язання якої приведе до знаходження розв'язків нерівності (3). Використаємо *спосіб дослідження властивостей заданої квадратичної функції:*

$$y=x^2-(3m+1)x-3m-2,$$

які впливають на визначення знаку значень функції.

Засобом дослідження математичної моделі буде відомий алгоритм дослідження властивостей квадратичної функції, за допомогою якого і будемо розв'язувати нерівність (3). Нехай D − дискримінант квадратного тричлена, x_1 та x_2 – його корені (покладемо: $x_1 < x_2$). Враховуючи, що коефіцієнт при старшому члені $1 > 0$, то маємо, що $y > 0$ у випадку $D \ge 0$ на проміжку $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, у випадку $D < 0$ для всіх $x \in R$. Реалізуємо це в нашій вправі: $D = (3m+1)^2 + 4(3m+2) = 9(m+1)^2$.

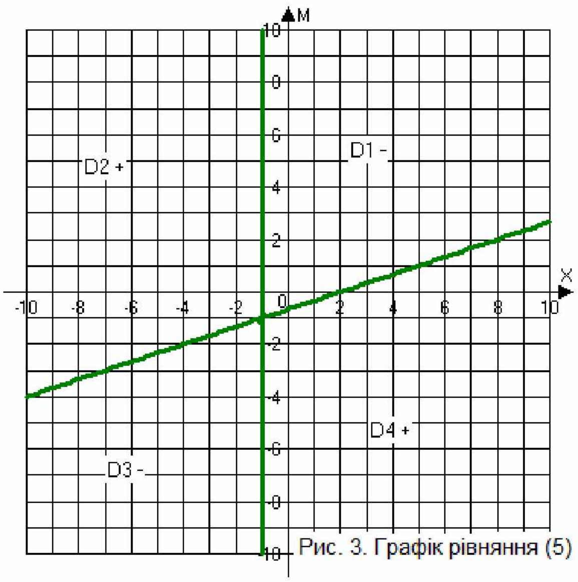

Рис. 3. Графік рівняння (5)

Бачимо, що умова $D > 0$ виконуватиметься для всіх $m \ne -1$. Знайдемо корені квадратного тричлена: $x_{1,2} = \dfrac{3m+1 \pm 3(m+1)}{2}$. Тому $x_1 = -1,\ x_2 = 3m+2$. Врахувавши, що при $m > -1$ $x_2 > x_1$, а при $m < -1$ $x_2 < x_1$, *сформулюємо відповідь*:

$$\begin{cases} \text{при} \quad m \in (-\infty; -1) \quad x \in (-\infty; 3m+2) \cup (-1; +\infty) \\ \text{при} \quad m \in (-1; +\infty) \quad x \in (-\infty; -1) \cup (3m+2; +\infty) \\ \text{при} \quad m = -1 \quad x \in \emptyset \end{cases} \tag{4}$$

Спосіб 2. Змінимо *вигляд математичної моделі задачі. Побудуємо графік рівняння*, ліва частина якого співпадає з лівою частиною нерівності (3):

$$x^2 - (3m+1)x - 3m - 2 = 0$$

Дане рівняння – це *модель вихідної задачі* (3). Шляхом елементарних перетворень лівої частини отримаємо: $(x^2 - x - 2) - (3mx + 3m) = 0$, або:

$$(x+1)(x-2-3m) = 0 \qquad (5)$$

Будуємо графік останнього рівняння у системі координат $x0m$. В результаті побудови ми отримаємо пару прямих: $x = -1;\ m = \dfrac{1}{3}(x-2)$ (рис. 3), які розбили всю числову площину на 4 області: D_1, D_2, D_3, D_4.

Визначимо знаки лівої частини нерівності (3) в кожній з областей. Прийдемо до висновку, що умовам нерівності задовольняють лише області D_2 і D_4 без їх границі (так як нерівність строга). На етапі *трансляції отриманого результату* описуємо аналітично області D_2 і D_4 так само, як ми показували це в [6], Очевидно, що ми прийдемо до тієї ж відповіді (4).

3. Формування умінь розв'язувати задачі інтегративного змісту.

Відомо, що математичні задачі з високою невизначеністю розширюють уявлення школярів про різноманітні підходи, ідеї, методи, які забезпечують їх розв'язування, що спонукає учнів до висування й обґрунтування певних припущень, побудови фрагментарних теоретичних узагальнень, забезпечуючи в такий спосіб розвиток процесу формування у школярів творчого, евристичного мислення, а також прагнення до дослідницької діяльності. Такі задачі відносяться до математичних задач інтегративного змісту [7].

Як уже зазначалося, основним прийомом розв'язування математичних задач є математичне моделювання. При математичному моделюванні маємо справу із знаковою системою (наприклад, у вигляді графічної схеми), яка в математичній формі виражає основні закономірності, властивості об'єкту, що вивчається. У процесі математичного моделювання виділяють п'ять етапів (див. п. 2 статті). Щоб пошук і створення способу розв'язування задач відбувались за певним планом, учні повинні володіти основними способами (методами) розв'язування, серед яких можна виділити такі основні: розбиття задачі на підзадачі; перетворення задачі; кодування об'єктів задачі [8], [9].

Отже, під процесом розв'язування математичної задачі будемо розуміти процес послідовної побудови нових моделей задачної ситуації певної задачі, причому кожна нова модель задачі буде мати меншу невизначеність, ніж попередня.

Задача 3. *У кут, що містить 60°, вписано 5 кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга?*

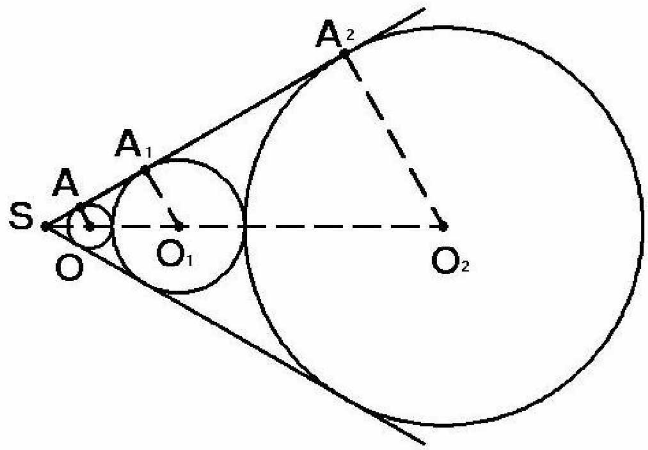

Рис. 4. Графічне зображення умови задачі 3

Спосіб 1 (розбиття задачі на підзадачі). Спочатку розбиваємо текст задачі на частини: а) у кут, що містить 60°, вписується коло; б) в цей же кут вписується ще 4 кола, кожне наступне з яких, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього; в) знаходиться площа найменшого круга; г) знаходиться сума площ всіх 5 кругів; д) порівнюється $S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$ і S_1.

Спочатку будуємо кут 60° (рис. 4). Далі постає питання − як у кут, рівний 60°, вписати коло радіусу R, яке буде дотикатися до його сторін? Фактично, це і є перша використана нами *допоміжна модель задачі*. Проаналізувавши ситуацію, приходимо до висновку, що центр даного кола знаходитиметься на бісектрисі даного кута , а дане коло будується за допомогою прямокутного трикутника (так як $\angle ASO = \frac{1}{2}\cdot 60^0 = 30^0$, то ΔSAO − прямокутний з гострими кутами 30^0 та 60^0, а тому $SO = 2OA$). Далі ставимо таку задачу (друга *допоміжна модель задачі*): *Дано кут , рівний 60°, і вписане в нього коло, яке дотикається до сторін цього кута. Вписати в цей кут коло так, щоб воно дотикалось до сторін кута і до даного кола.*

З'ясовуємо, що центр цього кола буде лежати також на бісектрисі даного кута, позначаємо через R_1 радіус шуканого кола, з'ясовуємо подібність трикутників SAO та SA_1O_1, визначаємо, що коефіцієнт подібності рівний $\frac{1}{2}$, визначаємо у цих трикутниках пари пропорційних сторін:

$$\frac{OA}{SO} = \frac{O_1A_1}{SO_1} = \frac{1}{2},$$

визначаємо з останньої рівності $O_1A_1 = \frac{1}{2}SO_1$, враховуємо рівності $O_1A_1 = R_1$ та $SO_1 = 3R + R_1$, приходимо до висновку $R_1 = 3R$. Отже, здійснивши ряд міркувань, приходимо до висновку, що радіус шуканого кола буде втричі більший, ніж радіус даного кола. Побудова трьох наступних кіл аналогічна до попередньої побудови. Далі визначається факт, що радіуси всіх п'яти кіл відносяться як:

$$R : R_1 : R_2 : R_4 : R_5 = 1 : 3 : 9 : 27 : 81.$$

Таке виконання обґрунтування до рисунку робить зрозумілим і подальший хід розв'язання задачі, оскільки у процесі розв'язування кожної з підзадач даної задачі (або допоміжних моделей основної задачі) стає відомим відношення радіусів всіх п'яти кіл.

Це дає змогу з'ясувати ряд нових питань, відповідь на які дасть можливість виконати необхідні обчислення: а) як відносяться площі подібних фігур (якщо відомим є відношення їх лінійних елементів)? б) як знайти відношення площ всіх 5 кругів? в) як можна позначити суму площ всіх 5 кругів? г) як відносяться сума площ 5 кругів і площа найменшого круга? Розв'язання даної задачі полягає у виконанні певних аналітичних викладок:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5}{S_1} = 1 + 3^2 + 9^2 + 27^2 + 81^2 = 7381.$$

Звертаючи увагу читача на виділені раніше рівні інтеграції, зазначимо, що такий спосіб розв'язування задачі забезпечує інтеграцію математичних знань та умінь учнів в межах навчальної дисципліни (геометрії), а про розв'язання окремих підзадач можна сказати, що інтегрування знань та умінь забезпечується на рівні розділу (або навіть окремої теми) навчального матеріалу.

Спосіб 2 (перетворення задачі) полягає в тому, що за допомогою деякого прийому ми перетворюємо дану задачу в більш просту, знайому учням, еквівалентну задачу. Переформулюємо задачу так: *У кут, що містить 60°, вписано 5 кіл так, що кожне наступне коло, починаючи з 2-го, дотикається до попереднього. Перше коло має радіус 1. У скільки разів сума площ всіх п'яти відповідних кругів більша за площу найменшого круга?*

При цьому ми маємо конкретизацію моделі задачі. Але процес розв'язування конкретизованої моделі передбачає доведення факту еквівалентності цієї моделі та основної задачі.

Спосіб 3 (кодування об'єктів задачі).

Виконавши побудову малюнка до задачі, можна запропонувати розв'язати задачу, здійснивши перехід від геометричної мови до алгебраїчної − представивши компоненти умови задачі у вигляді зростаючої геометричної прогресії, перший член якої рівний S_1, а знаменник − 3^2. Тоді задача зводиться до знаходження співвідношення між сумою перших п'яти членів геометричної прогресії та її першим членом:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5}{S_1} = \frac{S_1 \cdot \left(9^5 - 1\right)}{(9-1) \cdot S_1} = 7381.$$

На відміну від 2-го методу, де заміна відбувається в межах однієї й тієї ж задачі, даний спосіб розв'язування передбачає перехід від однієї мови до іншої за допомогою кодування об'єктів задачі. В розглянутій задачі відбувається перехід від геометричної мови (знаходження площі круга) до алгебраїчної (використання геометричної прогресії для знаходження суми площ 5 кругів і порівняння їй з площею найменшого круга). Застосування цього методу при розв'язуванні задач інтегративного змісту дає змогу розвивати вміння учнів застосовувати перехід від однієї мови (моделі) до іншої в межах однієї задачі.

Основна ідея запропонованої технології формування умінь розв'язувати задач з математики полягає в структуруванні поля можливостей (або поля можливих дій) для суб'єкта розв'язання задачі за допомогою приписів алгоритмічного виду (чи евристичних алгоритмів) з відповідним зменшенням невизначеності задачної ситуації і зростанням її визначеності, тобто зростанням інформації про задачну ситуацію. При «поміщенні» суб'єкта розв'язання задачі (разом із конкретною задачею) до структурованого в такий спосіб поля можливостей значно полегшуються зусилля при відшуканні рішення цієї задачі.

Підхід до формування процедурної компетентності передбачає створення моделі (чи послідовності моделей) процесу розв'язування задачної ситуації (у випадку задачі 1 модель задачної ситуації у вигляді матриці інформації, у випадку задачі 2 – у вигляді аналітичної або ж графічної моделі, у випадку задачі 4 – у вигляді розбиття задачі на підзадачі; перетворення задачі; кодування об'єктів задачі). Отже, моделлю процесу розв'язування задачі є знакова система (матриця інформації, аналітична викладка чи графічна ілюстрація і т.д.), що: а) чимось подібна до задачної ситуації, тобто має якісь однакові на даному рівні деталізації властивості із задачною ситуацією; б) модель є більш визначеною, абстрагованою та простою у порівнянні із самою задачною ситуацією; в) робота з моделлю дає нову інформацію про задачну систему, тобто зменшує її невизначеність і приводить до повної визначеності розв'язку.

Створення моделі задачної ситуації дає можливість повно і ефективно провести етап матеріалізації розумових дій суб'єкта навчання у знаковій формі і дозволяє моделювати процес розв'язування задачної ситуації у вигляді послідовностей моделей його етапів. Процес створення матриці інформації про задачну ситуацію є системним підходом до розв'язання задачної ситуації, оскільки: а) визначає складові частини задачної ситуації згідно побудованої ієрархії; б) дає цілісне та елементарне уявлення про задачну ситуацію; в) відображає зв'язки між елементами предметної області задачі; г) допомагає скласти модель задачі у вигляді системи (або сукупності) умов.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Дичківська І.М. Інноваційні педагогічні технології. – К.: Академвидав, 2004. – 352 с.
2. С.А. Раков. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.
3. Веников В.А. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1986. – 480с.
4. В. Кушнір, Г. Кушнір, Р. Ріжняк. Системне моделювання процесу розв'язування текстових математичних задач: кібернетичний підхід // Постметодика. – 2009. – № 4 (88). – с. 22-27.
5. Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К. Старинные занимательные задачи. − Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1988. − 160 с.
6. В. Кушнір, Г.Кушнір, Р. Ріжняк. Методичні особливості використання властивостей функцій у процесі розв'язування математичних задач // Математика в школі. – 2008. – № 6. – с. 37-42.
7. В. Кушнір, Р. Ріжняк. Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту // Математика в школі. – 2009. – № 5. – с. 13-17.
8. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики / Навчально-методичний посібник. − Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В.Винниченка, 2008 − 148 с.
9. Фридман Л. М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач. – М.: Педагогика, 1977.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Кушнір Василь Андрійович – доктор педагогічних наук, професор кафедри математики КДПУ ім. В.Винниченка.

Ріжняк Ренат Ярославович – кандидат педагогічних наук, професор кафедри математики КДПУ ім. В.Винниченка.

Наукові інтереси: методологічні дослідження складних систем, зокрема педагогічного процесу.